CUADERNILLO 5

Nueva carpeta de Matemática VI

Ruth Schaposchnik (coord.)
Carlos Abdala - Luis Garaventa - Claudio Turano

Alumno/a

Curso

5. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales 3
Revisión inicial ... 4
Matrices ... 5
Operaciones con matrices ... 6
Algunas definiciones ... 8
Determinantes ... 10
Propiedades de los determinantes ... 12
Sistemas de *n* ecuaciones lineales con n incógnitas ... 13
Método de Gauss ... 14
Regla de Cramer ... 18
En el mundo real ... 19
La matriz de insumo-producto ... 19
Las matrices en las rutas aéreas ... 20
Más actividades ... 21
Autoevaluación ... 22

AIQUE

Este CUADERNILLO 5 pertenece a la Nueva carpeta de Matemática VI.
No puede venderse por separado.

DIRECCIÓN EDITORIAL
Teresita Valdettaro

COORDINACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Ruth Schaposchnik

EDICIÓN
Nora Legorburu

CORRECCIÓN
Cecilia Biagioli (coordinación)
Inés Gugliotella

SUPERVISIÓN GRÁFICA
Verónica Uher
Victoria Maier

COORDINACIÓN GRÁFICA
Leda Rensin - Silvina Roveda

DIAGRAMACIÓN
Daniel Balado
Silvana López

ILUSTRACIONES
Diego Molina
Estudio DOBLEVUELO (aperturas)

FOTOGRAFÍA
Archivo Aique

PRODUCCIÓN INDUSTRIAL
Pablo Sibione

Agradecemos la colaboración de Gustavo Delupí y Claudia García en el control de las respuestas.

© Copyright Aique Grupo Editor S. A.
Valentín Gómez 3530 (C1191AAP)
Ciudad de Buenos Aires
Teléfono y fax: 4867-7000
e-mail: editorial@aique.com.ar - www.aique.com.ar

Hecho el depósito que previene la Ley 11.723
LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA
ISBN 978-987-06-0078-7
Primera edición

La reproducción total o parcial de este material en cualquier forma que sea, idéntica o modificada y por cualquier medio o procedimiento, sea mecánico, electrónico, informático, magnético y sobre cualquier tipo de soporte, no autorizada por los editores, viola derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

Turano, Claudio
Nueva carpeta de matemática VI / Claudio Turano ; Carlos Abdala ; Luis Garaventa ; coordinado por Ruth Schaposchnik - 1a ed. - Buenos Aires : Aique Grupo Editor, 2007.
176 p. ; 28x20 cm.

ISBN 978-987-06-0078-7

1. Matemática. I. Abdala, Carlos II. Garaventa, Luis III. Schaposchnik, Ruth, coord. IV. Título
CDD 372.7

Esta edición se terminó de imprimir en febrero de 2007 en Latingráfica. Rocamora 4161, Ciudad de Buenos Aires.

5 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Cuando leemos la tabla de posiciones de los equipos de fútbol o los horarios de los trenes en la estación, o cuando trabajamos con una planilla de cálculo, utilizamos *matrices*.

Las matrices se aplican a la resolución de *sistemas de ecuaciones* vinculados a Geometría, Estadística, Economía, Informática, Física, etcétera. Su uso constituye actualmente una herramienta esencial en los lenguajes de programación.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

REVISIÓN INICIAL

1 Unan con una flecha las ecuaciones de la columna de la izquierda que sean equivalentes a las ecuaciones de la columna de la derecha.

$3x - y = 1$	$4x + 4y = 12$
$x + y = 3$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
$-2y = x - 1$	$6x - 2y = 2$

2 Completen la siguiente tabla referida a sistemas de ecuaciones lineales.

Si un sistema de ecuaciones	Entonces
es compatible determinado	.....
.....	tiene infinitas soluciones
es incompatible	.....

3 Resuelvan y clasifiquen los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + \frac{y}{3^{-1}} = -(x + 10) \\ x = 8y + 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y = 0 \\ \frac{1}{5}x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -x + \frac{1}{2}y = -2 \end{cases}$

4 Hallen, cuando sea posible, los valores de k para que cada sistema tenga

a) una solución. b) infinitas soluciones. c) ninguna solución.

I. $\begin{cases} 2x + ky = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$

II. $\begin{cases} x + ky = 6 \\ \frac{1}{3}x + y = k - 1 \end{cases}$

III. $\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + y = k - 1 \end{cases}$

5 Carlos compró 2 lapiceras y 3 cuadernos, y gastó \$13. Nora compró 4 lapiceras y 6 cuadernos iguales a los que compró Carlos, y gastó \$26.

a) Expliquen por qué los datos resultan insuficientes para averiguar el precio de las lapiceras y los cuadernos.

b) Agreguen un dato de modo que el problema tenga una solución única y resuélvanlo usando el dato que agregaron.

6 Inventen un problema que pueda resolverse usando el sistema de la actividad **3** b).

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Matrices

Para leer y recordar

Una *matriz* es un conjunto de números dispuestos en forma rectangular.

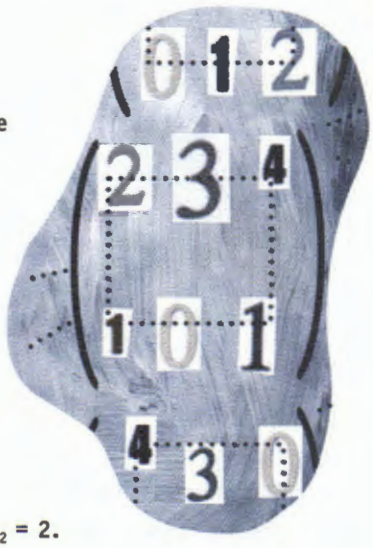
Ejemplo:

$$\begin{matrix}\text{fila 1} \longrightarrow \\ \text{fila 2} \longrightarrow\end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de 2 por 3 ($M_{2\times 3}$)

columna 1 columna 2 columna 3

$a_{12} = 3$ se lee *el elemento que ocupa la fila 1 columna 2 es 3.*



Ejemplo:

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 2 columnas.

Los elementos de A son $a_{11} = 1$; $a_{12} = 5$; $a_{21} = -1$; $a_{22} = 0$; $a_{31} = 8$; $a_{32} = 2$.

7 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, indiquen cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas y cuáles son falsas.

a) $a_{21} = 3$ .....

b) $b_{23} + a_{21} = a_{22}$ .....

c) A es de 3 x 2 .....

d) $a_{12} = a_{32}$ .....

e) B es de 4 x 2 .....

f) $b_{24} - 2\ b_{13} = b_{11}$ .....

8 Completen la matriz $A_{4\times 3}$ de modo que sus elementos sean iguales a la suma de los subíndices del lugar que ocupan.

$$A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

9 Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^{1-x}$ y $h(x) = \ln x$, escriban una matriz $A_{3\times 3}$ que cumpla las condiciones indicadas.

$$A = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) & f''(1) \\ g(1) & g'(1) & g''(1) \\ h(1) & h'(1) & h''(1) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Operaciones con matrices

Para leer y recordar

- Dos matrices que tienen la misma cantidad de filas y de columnas pueden sumarse, como se muestra a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{2}^{a_{11}} & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{b_{11}} & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} \overbrace{2+1}^{a_{11}+b_{11}} & -1+4 & 1+3 \\ -1+0 & 1+(-1) & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Una matriz puede multiplicarse por un número, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$C = \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{c_{11}} & 3 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4.C = \begin{pmatrix} \overbrace{4.1}^{4.c_{11}} & 4.3 \\ 4.(-3) & 4.4 \\ 4.0 & 4.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -12 & 16 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Dos matrices pueden multiplicarse, siempre que el número de columnas de la primera de ellas sea igual al número de filas de la segunda.
  Si dos matrices M y N pueden multiplicarse, cada elemento mn_{ij} de la *matriz producto* se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz M por el correspondiente de la columna j de la matriz N.

Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M.N = \begin{pmatrix} \overbrace{17}^{1.2+3.5} & -7 & 3 & 6 \\ 8 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 & \overbrace{1}^{0.3+1.1} \end{pmatrix}$$

10 Consideren las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4+b & c-2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5-b & 8-c \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -\frac{9}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

a) Sabiendo que $A = B$, encuentren a, b y c.

b) Efectúen los siguientes cálculos.

I. $A + C$ **II.** $B + 2C$ **III.** $2A - 4C$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

11 Con las matrices M_{4x5} y N_{5x3} ¿pueden efectuar $M \cdot N$? ¿Y $N \cdot M$?

12 Resuelvan, cuando sea posible, las operaciones indicadas con las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 6 & 6 \\ 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

a) $B + E$
b) $A \cdot B$
c) $C \cdot A$
d) $B^2 \cdot C$
e) $2B - 5E$
f) $A \cdot B + D^2$
g) $A \cdot B + A \cdot D$
h) $(A \cdot C) \cdot D$
i) $A \cdot (C \cdot D)$
j) $A \cdot (B + E)$
k) $F \cdot G$
l) $D \cdot H$

13 La matriz M muestra los consumos promedio anuales de gas (m^3), luz (kWh) y teléfono (pulsos) de dos familias estándar. La matriz N muestra los costos, en sus unidades respectivas, de esos impuestos en los años 2003, 2004, 2005 y 2006.

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{luz} & \text{gas} & \text{tel.} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1953 & 2084 & 3400 \\ 1800 & 1950 & 3200 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{familia 1} \\ \text{familia 2} \end{array}$$

$$N = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{2003} & \text{2004} & \text{2005} & \text{2006} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0{,}10 & 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}15 \\ 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}13 & 0{,}14 \\ 0{,}06 & 0{,}08 & 0{,}07 & 0{,}07 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{luz} \\ \text{gas} \\ \text{tel.} \end{array}$$

Efectúen $M \cdot N$ e interpreten el sentido de la matriz que se obtiene como producto.

14 Comprueben que si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces, $A \cdot B$ es una matriz *nula* (todos sus elementos son cero).

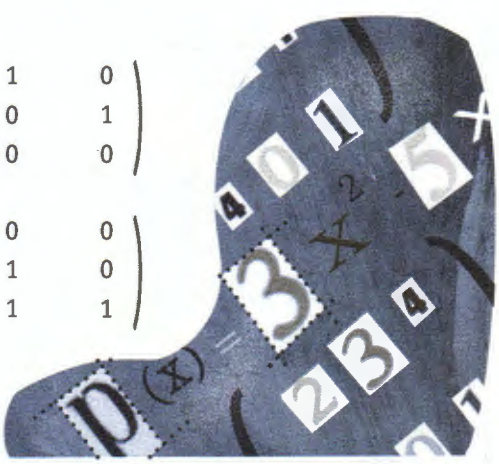
15 Hallen $P(X) = 3X^2 - 5X$ en cada caso.

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Algunas definiciones

Para leer y recordar

Definición	Ejemplos
Matriz fila: es una matriz que tiene una sola fila.	$A = (2 \quad 5 \quad 1)$
Matriz columna: es una matriz que tiene una sola columna.	$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
Traspuesta de una matriz (A^t): es la matriz cuyas filas son las columnas de A dispuestas en el mismo orden.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
Opuesta de una matriz ($-A$): es la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento de A por su opuesto.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada: es una matriz que tiene la misma cantidad de filas que de columnas. Decimos que los elementos que se encuentran en la misma fila y columna están en la *diagonal principal*.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ $a_{11} = 1$, $a_{22} = 3$ y $a_{33} = -3$ están en la diagonal principal.
Matriz triangular superior: es una matriz cuadrada que tiene ceros en todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal.	$B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
Matriz identidad (I): es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos, excepto los de la diagonal principal, que son todos iguales a 1.	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica: es una matriz cuadrada que es igual a su traspuesta.	$A = A^t = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ -8 & -1 & 9 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
Matriz antisimétrica: es una matriz cuadrada que es igual a la opuesta de su traspuesta.	$A = -A^t = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 6 \\ 9 & 0 & -4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz inversa (A^{-1}): es una matriz tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.	

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

16 Consideren $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallen A^2 e indiquen qué tipo de matriz es A^2.

17 Analicen cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles, falsas para las matrices A y B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

a) A es simétrica .....

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$ .....

c) $(A^t)^t = A$ .....

d) B es antisimétrica .....

e) $A + A^t = 2 \cdot A^t$ .....

f) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ .....

g) $(A \cdot A^t)$ es simétrica .....

h) $(A^t \cdot A)$ es antisimétrica .....

i) $(A + A^t)$ es simétrica .....

j) $(A - A^t)$ es antisimétrica .....

k) $A \cdot B = I$ .....

l) $B \cdot A = I$ .....

18 Consideren las matrices $A = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculen:

a) A^2 b) B^2 c) $(2A - I)^2$ d) $(2B - I)^2$

19 Escriban, si es posible:

a) Una matriz de 4 por 4, simétrica, sabiendo que la suma de los elementos de la diagonal principal es 5.

b) Una matriz de 4 por 4, triangular superior, sabiendo que el producto de los elementos de la diagonal principal es un número negativo.

c) Una matriz de 4 por 4 con todos los elementos que no están en la diagonal principal nulos.

d) Una matriz de 4 por 4 que sea triangular superior, simétrica y tenga todos unos en la diagonal principal.

20 Encuentren todas las matrices simétricas posibles de la forma $\begin{pmatrix} a & a^2 + 4 \\ a + 10 & a + 2 \end{pmatrix}$.

21 Hallen a, b y c para que la matriz $\begin{pmatrix} b & a - 11 \\ a + 1 & c \end{pmatrix}$ sea antisimétrica.

22 Indiquen los valores de a y b para que el resultado de la operación $\begin{pmatrix} a^2 & -7 \\ b + 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ a & b \end{pmatrix}$ sea la matriz identidad.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Determinantes

Para leer y recordar

A cada matriz cuadrada B_{nxn} se le asocia un número llamado *determinante de B*, de orden n, que se simboliza $det(B)$, o $|B|$, y se define de la siguiente manera:

Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces, $det(B) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$ (determinante de orden 2)

Si $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, para calcular el determinante de B, que es de orden 3, elegimos una fila o columna cualquiera de B y procedemos de la siguiente manera:

$$det(B) = \underbrace{(-1)^{1+1} \cdot b_{11} \cdot \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{b_{11}} & \cancel{b_{12}} & \cancel{b_{13}} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} + \underbrace{(-1)^{2+1} \cdot b_{21} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ \mathbf{b_{21}} & \cancel{b_{22}} & \cancel{b_{23}} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} + \underbrace{(-1)^{3+1} \cdot b_{31} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ \mathbf{b_{31}} & \cancel{b_{32}} & \cancel{b_{33}} \end{pmatrix}}$$

Ejemplos:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10$

Para la matriz $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, eligiendo la fila 1, hallamos el determinante de la siguiente manera:

$$det(B) = \underbrace{(-1)^{1+1} \cdot 7 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbf{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + \underbrace{(-1)^{1+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} 7 & \mathbf{8} & \cancel{9} \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} + \underbrace{(-1)^{1+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\begin{pmatrix} 7 & 8 & \mathbf{9} \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} = 0$$

23 Calculen los determinantes de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

24 Hallen, en cada caso, el valor de k sabiendo que todos los determinantes siguientes son nulos.

a) $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2k \\ 4 & k \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 4 & k \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} k-3 & 1 \\ 5 & k+1 \end{vmatrix}$

25 Calculen los siguientes determinantes de orden 3 de las dos formas que se indican.

a) Desarrollando una fila.

b) Desarrollando una columna.

I. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **II.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 120 & 45 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **III.** $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 1 & 3 & 15 \\ 8 & 12 & 20 \end{vmatrix}$ **IV.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \\ 10 & 15 & 20 \end{vmatrix}$

26 Hallen el valor de k para que los siguientes determinantes sean nulos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 23 & 3k & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ k & -1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} k & 3k & k^2 \\ 4 & 3 & 8 \\ 5 & 15 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} k-1 & k+2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & k+3 & 0 \end{vmatrix}$

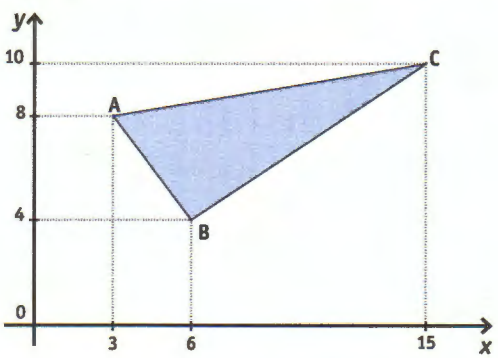
27 Observen la figura y resuelvan lo pedido.

a) Hallen el área del triángulo ABC (sugerencia: pueden ayudarse con sumas y restas de áreas de figuras que observen en el gráfico).

b) Verifiquen para este ejemplo la siguiente igualdad:

Área del $\hat{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right\|$ donde $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$, $C = (x_3; y_3)$.

La línea doble indica que se considera el valor absoluto del determinante.



28 Consideren los puntos $(x_1; y_1) = (1; 7)$ y $(x_2; y_2) = (-2; -2)$.

a) Hallen una ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

.....

b) Comprueben que $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ es una ecuación equivalente a la encontrada.

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Propiedades de los determinantes

Para leer y recordar

Las siguientes propiedades son muy útiles para calcular determinantes.

Enunciado de la propiedad	Ejemplo
El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow det\,(A) = det\,(A^t) = 6$
Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, su determinante es cero.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\,(A) = 0$
Si se permutan dos filas o dos columnas de una matriz, el determinante de la matriz obtenida es el opuesto al determinante de la matriz original.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $det\,(A) = 28$ $det\,(B) = -28$
Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow det\,(A) = 0$
Si se multiplican cada elemento de una fila o columna de una matriz por un número, el determinante de la matriz obtenida es igual al producto de ese número por el determinante de la matriz original.	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & -3 \cdot 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $det\,(A) = 17$ y $det\,(B) = 51 \Rightarrow det\,(B) = 3 \cdot det\,(A)$
Si una matriz tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\,(A) = 0$
El determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los coeficientes de la diagonal principal.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\,(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

29 Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$, hallen los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & -b \\ c & -d \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{vmatrix}$

30 Completen las siguientes matrices de modo que sus determinantes sean 0.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 7 & \ldots\ldots & -3 \\ -2 & \ldots\ldots & -1 \\ -5 & \ldots\ldots & 4 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & \ldots\ldots & 3 \\ \ldots\ldots & -4 & -6 \\ 9 & 3 & \ldots\ldots \end{pmatrix}$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Sistemas de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas

Para leer y recordar

- Un sistema de ecuaciones del tipo $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ puede expresarse como un producto de matrices, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

- Con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de este sistema, formamos una nueva matriz a la que llamamos *matriz ampliada*.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

Ejemplos:

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = C$ es la expresión, como producto de matrices, del sistema $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x + y = 12 \end{cases}$

- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = C$ es la expresión, como producto de matrices, del sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$

- En el sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3y = 6 \end{cases}$ la matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$ y la matriz de los coeficientes de las incógnitas es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

31 Escriban las matrices ampliadas de los siguientes sistemas de ecuaciones e indiquen en qué casos la matriz no ampliada es matriz triangular superior.

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 10 = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$

.....

.....

b) $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$

.....

.....

c) $\begin{cases} 2x + y - 2z = -2 \\ y + z - 2 = 0 \\ -2z + 1 = 0 \end{cases}$

.....

.....

d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$

.....

.....

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Método de Gauss

Para leer y recordar

El *método de Gauss* es útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales y consiste en lo siguiente: A partir de la matriz ampliada del sistema, se realiza una serie de operaciones con sus filas hasta transformar la matriz no ampliada en otra triangular superior, que está asociada a un sistema equivalente al original.

Las operaciones que se pueden realizar son permutar filas, multiplicar una fila por un número y sumar filas.

Ejemplo:

Para resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$ utilizamos el método de Gauss de la siguiente manera:

① Escribimos la matriz ampliada del sistema. Para que la matriz no ampliada sea triangular superior, debemos operar convenientemente hasta que a_{21}, a_{31} y a_{32} sean ceros.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

② Obtenemos un cero en a_{21} resolviendo $F'_2 = F_2 - 3F_1$ (↳ Nueva fila 2, ↳ Fila 1)

F_2	3	−2	1	7
$-3 \cdot F_1$	$-3 \cdot 1$	$-3 \cdot 1$	$-3 \cdot 1$	$-3 \cdot 2$
$F_2 - 3F_1$	0	−5	−2	1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

③ Obtenemos un cero en a_{31} resolviendo $F'_3 = F_3 - 2F_1$

F_3	2	3	2	3
$-2 \cdot F_1$	$-2 \cdot 1$	$-2 \cdot 1$	$-2 \cdot 1$	$-2 \cdot 2$
$F_3 - 2F_1$	0	1	0	−1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

④ Obtenemos un cero en a_{32} resolviendo $F'_3 = F_3 + \frac{1}{5} F_2$

F_3	0	1	0	−1
$\frac{1}{5} F_2$	$\frac{1}{5} \cdot 0$	$\frac{1}{5} \cdot (-5)$	$\frac{1}{5} \cdot (-2)$	$\frac{1}{5} \cdot 1$
$F_3 + \frac{1}{5} F_2$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

⑤ La matriz resultante corresponde al sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -5y - 2z = 1 \\ -\frac{2}{5} z = -\frac{4}{5} \end{cases}$ equivalente al original.

Podemos resolver este sistema por sustitución, desde la ecuación con una sola incógnita hasta la que tiene más incógnitas.

$-\frac{2}{5} z = -\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{z = 2}$ $\quad -5y - 2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$ $\quad x + y + z = 2 \Rightarrow x + (-1) + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

La solución del sistema es, entonces, $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Para leer y recordar

Al utilizar el método de Gauss, en su etapa final podemos ver que, si en la última fila de la matriz ampliada quedan todos ceros, el sistema es compatible indeterminado, y que si en la última fila todos son ceros, menos el elemento correspondiente a la última columna, el sistema es incompatible.

Ejemplos:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **corresponde a un sistema compatible indeterminado.**

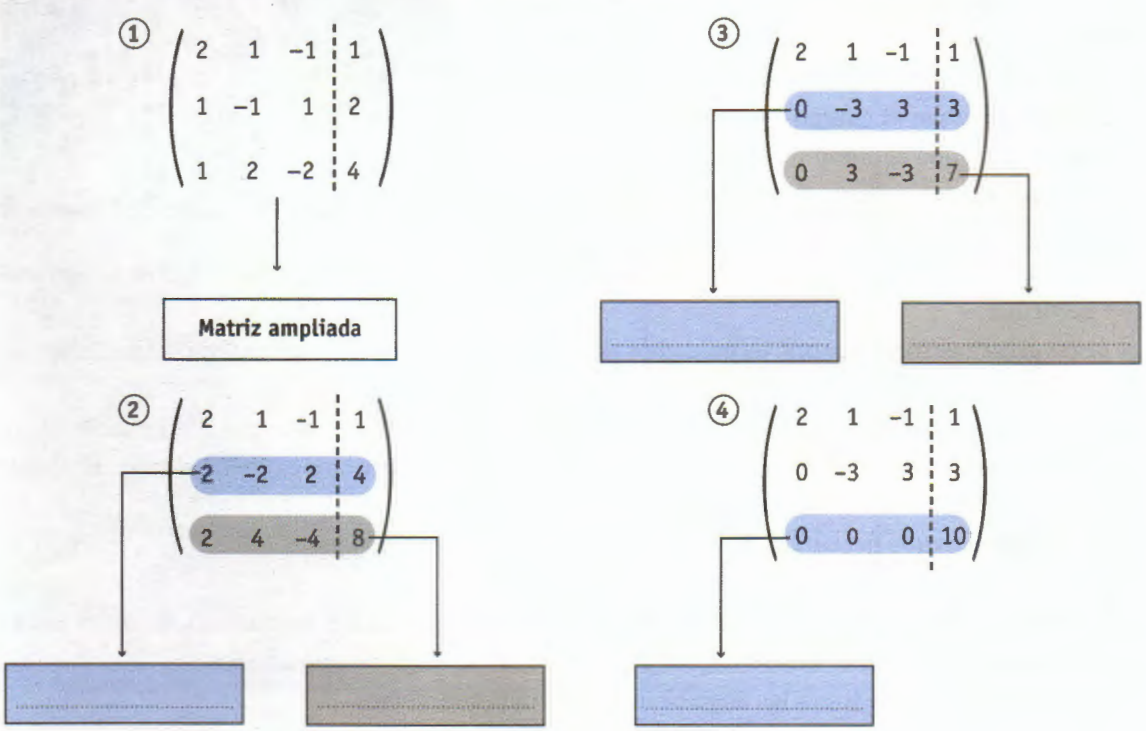
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$ **corresponde a un sistema incompatible.**

32 Escriban la forma matricial $A \cdot B = C$ de un sistema de ecuaciones equivalente a $\begin{cases} x + 2y - z = -4 \\ z - 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ de manera tal que A sea una matriz triangular superior.

33 Clasifiquen y resuelvan, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

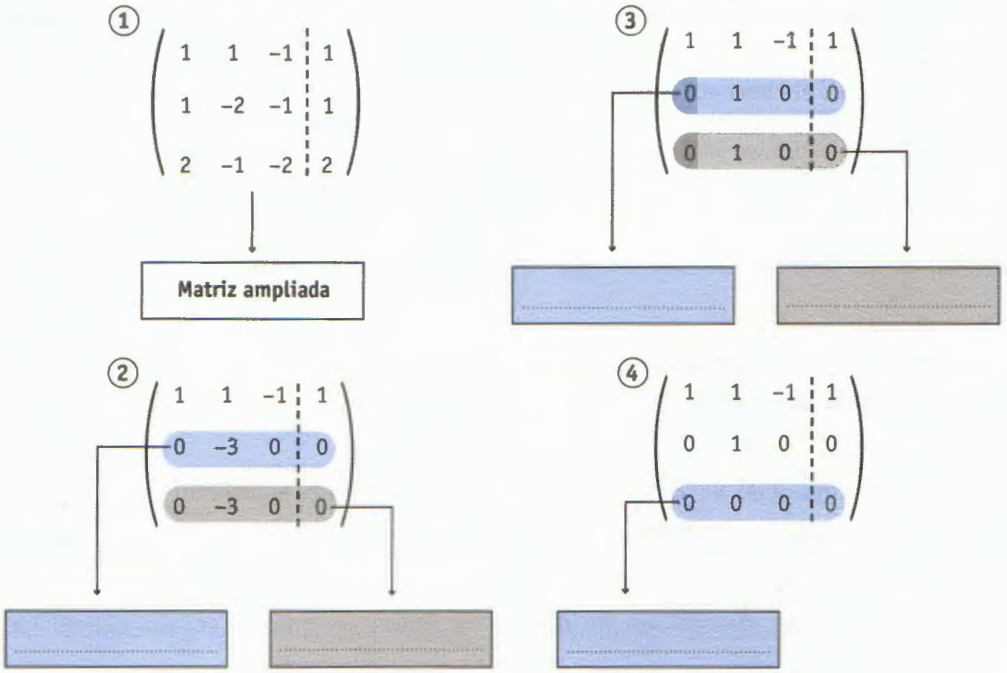
a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$

34 Consideren la siguiente matriz ampliada de un sistema de ecuaciones y las etapas de aplicación del método de Gauss. Escriban cuál fue la operación realizada en el lugar indicado.

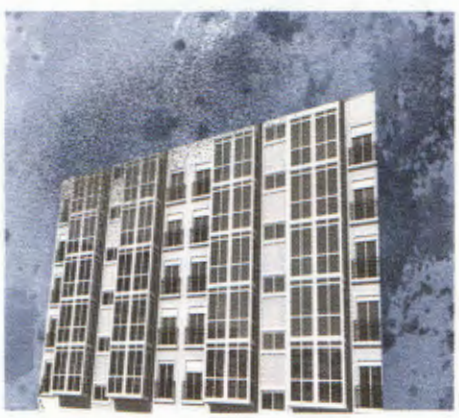


© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

35 Escriban el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz ampliada que se muestra, anoten las operaciones efectuadas en cada paso al utilizar el método de Gauss y clasifiquen el sistema.



36 Un edificio está dividido en 5 cuerpos, cada cuerpo tiene 11 pisos y cada piso, 6 departamentos. Una persona vive en un cuerpo, piso y departamento tales que si al cuerpo le suman el piso y le restan cuatro veces el número de departamento, obtienen la cantidad de departamentos por piso.
Además, si al triple de la suma del cuerpo y el departamento le restan 1, tienen como resultado el piso.
Por último, si suman el cuerpo, el piso y el departamento que habita, obtienen el número de pisos por cuerpo.
¿En qué cuerpo, piso y departamento vive esta persona?



37 Para ganar un juego, hay que adivinar un número de cuatro dígitos del cual se dan pistas generales y particulares.
Las pistas generales son estas: uno de los dígitos es el cero y se encuentra entre dos dígitos pares. Además, el número tiene cuatro cifras distintas y es menor que 7000.
Las pistas particulares son estas: los tres dígitos que faltan descubrir son tales que la diferencia de dos de ellos es 6; la suma del doble de esos mismos dígitos aumentada en una unidad da como resultado el triple del dígito restante y la suma de los tres es 17.
¿Cuál es el número que permite ganar el juego?

38 Uno de los ángulos interiores de un cuadrilátero mide 40°. De los restantes, la suma de los no consecutivos excede en 200° al otro ángulo y este es suplementario de uno de ellos.
Encuentren la medida de todos los ángulos interiores del cuadrilátero.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

39 Resuelvan los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} 3x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 5z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + y - z = -2 \\ 5x + y + z = 1 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = -3 \\ y + z = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + y - 2z = -2 \\ 6x - 3y + z = -3 \\ x + y = -3 \end{cases}$

40 Clasifiquen los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x + y + z - t = 2 \\ x - y + z + t = 2 \\ x + y - z - t = 0 \\ -x + y + z - t = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y - z + t = 1 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + y - z - 3t = -5 \\ 3x - y + 2z + 2t = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + z = 1 \\ z + t = -3 \\ x + t = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

41 Indiquen si alguno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene solución única.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x + y + z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 5y + z = 4 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ -x + 3y - z = -1 \\ -2x - z = 3 \end{cases}$

42 Utilicen el método de Gauss y completen la tabla.

Sistema de ecuaciones	Valores que puede tomar a para que el sistema tenga...		
	solución única	ninguna solución	infinitas soluciones
a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = a \\ 2x + 2y - (a^2 - 11)z = 2 \end{cases}$			
b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$			
c) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$			
d) $\begin{cases} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$			
e) $\begin{cases} 3x - y + az = 2a \\ x + y + z = a \\ x + 3y = 0 \end{cases}$			

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Regla de Cramer

Para leer y recordar

La *regla de Cramer* permite resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas aplicando determinantes.

• Para el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ definimos tres determinantes: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Luego, si $\Delta \neq 0$, las soluciones del sistema son los cocientes: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

• Para el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$

los determinantes son estos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

y, si $\Delta \neq 0$, las soluciones del sistema son $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ $\quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$

Ejemplo:

Para el sistema $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = -3 \end{cases}$ los determinantes son los siguientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

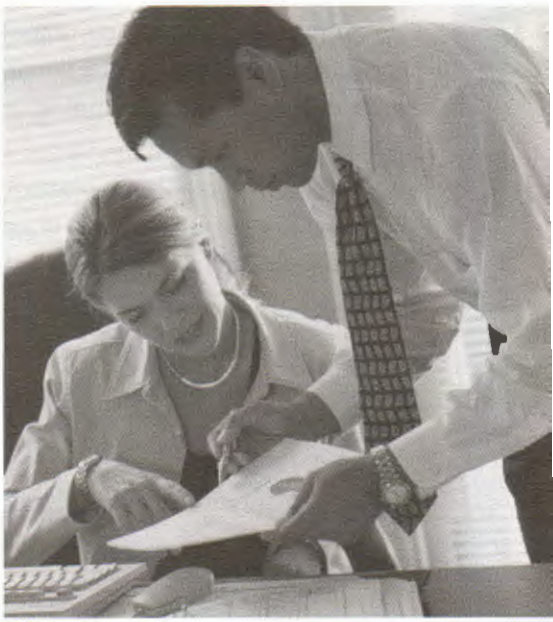
Luego, las soluciones del sistema son $x = \frac{-2}{-2} = 1$ $\quad y = \frac{2}{-2} = -1$ $\quad z = \frac{4}{-2} = -2$

43 Resuelvan el siguiente sistema aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ -x + 2y = 6 \end{cases}$$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

La matriz de insumo-producto



44 Un grupo económico posee tres empresas interdependientes: un servicio de asesoría en informática, un estudio especializado en estadísticas y encuestas, y una empresa que fabrica computadoras.

Por cada peso que produce la asesoría en informática se requiere una inversión de US$0,30 de servicios de la misma empresa; US$0,10 de servicios estadísticos y US$0,30 de computadoras.

Por cada peso de servicios estadísticos producido se requieren US$0,20 de servicios de asesoría informática, US$0,40 de servicios estadísticos y US$0,20 de computadoras. Cada peso de computadoras que se produce cuesta U$0,30 de asesoría informática, US$0,10 de servicios estadísticos y US$0,30 de computadoras.

Los datos se observan en la matriz A, llamada *matriz de insumo-producto*, donde los elementos son los coeficientes de insumo. Se considera que esta matriz es *productiva* si las sumas de los elementos de cada columna son menores que 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}40 & 0{,}10 \\ 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}30 \end{pmatrix}$$

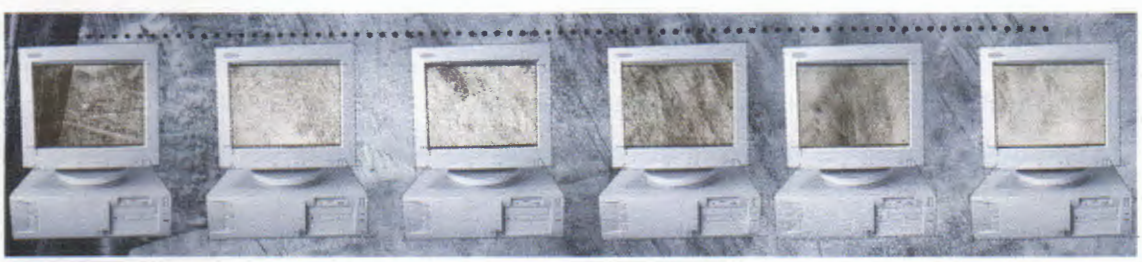
Mensualmente, la asesoría en informática produce $53 000 en servicios, la empresa de estadísticas produce $44 000 y la fábrica de computadoras, $61 000.

Con estos datos, *la matriz de producción* queda conformada así: $X = \begin{pmatrix} 53\,000 \\ 44\,000 \\ 61\,000 \end{pmatrix}$

Los niveles de producción se calculan siguiendo un modelo económico dado por $(I - A) \cdot X = D$, donde X es la matriz de producción, D es la matriz de demanda externa e I es la matriz identidad.

a) Calculen la demanda externa mensual de cada empresa necesaria para que la producción sea la indicada.

b) Analicen si la matriz A es productiva.



© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Matrices y grafos en las rutas aéreas

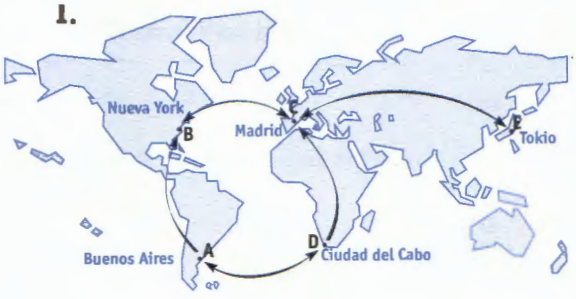
Un *grafo* es un conjunto de vértices y de aristas que los unen. Los grafos son utilizados, entre otras cosas, para planificar y diagramar rutas aéreas. Una forma de expresar un grafo es mediante una *matriz de adyacencia* que indica, en cada elemento a_{jk}, la cantidad de aristas entre los puntos j y k.

45 La siguiente matriz muestra los vuelos directos de una compañía aérea entre cinco ciudades, A, B, C, D y E, en la cual un 1 en el lugar ij significa que la ciudad que corresponde a la columna j tiene vuelo directo hacia la ciudad de la fila i.

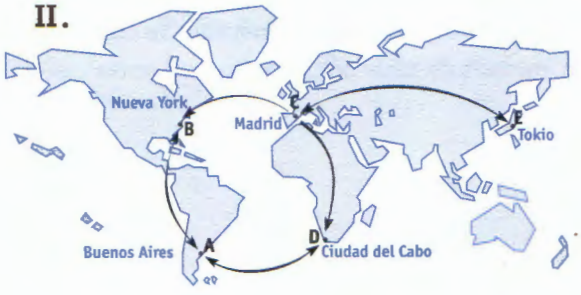
$$V = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Indiquen cuál de los siguientes itinerarios se corresponden con la matriz de vuelos.

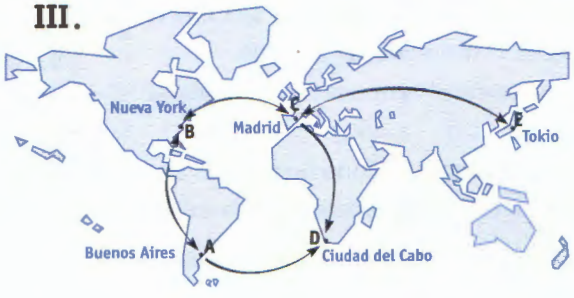
I.



II.



III.



b) Al calcular V^2, se obtiene una matriz que muestra los vuelos con una escala intermedia que hay entre las cinco ciudades. Calculen V^2 e indiquen hacia qué ciudades se puede volar, utilizando esta compañía, desde Tokio, haciendo a lo sumo una escala. Tengan en cuenta que, en la matriz cuadrada, un elemento distinto de cero indica al menos un vuelo con una escala intermedia.

c) Construyan la matriz de vuelo correspondiente a los vuelos sin escala para los itinerarios que no fueron elegidos en **a)**.

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

MÁS ACTIVIDADES

46 Siendo $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$ calculen:

a) $2A^2 - 3A$ b) $A^2 + 3A$

47 Sin hacer los cálculos, indiquen cuáles de los siguientes determinantes son nulos y expliquen por qué.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -3 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 7 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

48 Calculen los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 23 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 2 \end{vmatrix}$

49 Comprueben que si a y b son números reales, son reales las soluciones de la siguiente ecuación.

$$\begin{vmatrix} x-a & b \\ b & x+a \end{vmatrix} = 0$$

50 Hallen a, b, c y d para que se cumpla esto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

51 Un médico argentino viajó a Nueva York, México y Toronto a un simposio sobre enfermedades cardiovasculares.

En Nueva York gastó por día US$20 en hospedaje y US$30 en alimentos; en México gastó por día US$30 en hospedaje y US$20 en alimentos, y en Toronto gastó por día US$15 en hospedaje y US$20 en alimentos. Además, por conceptos varios gastó US$20 por día en cada una de las tres ciudades.

A su regreso, el registro de gastos indicó en total US$485 en hospedaje, US$540 en alimentos y US$440 en gastos varios.

¿Cuántos días estuvo en cada ciudad?

52 Utilicen el método de Gauss para clasificar los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 4y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 6x - 4y = 8 \\ -3x + 2y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ 2x + 10y = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 8y = 9 \\ 5x + 7y = -2 \end{cases}$

53 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

propongan una matriz $B \neq A$, también de 3 por 3, que cumpla con las condiciones que se solicitan en cada caso.

a) $det(B) = det(A)$

b) $det(B) = -det(A)$

c) $det(B) = -2det(A)$

© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

AUTOEVALUACIÓN

Marquen la opción correcta:

1 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot B$ es igual a

- ☐ a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
- ☐ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
- ☐ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
- ☐ d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

2 Consideren la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- ☐ a) A es simétrica.
- ☐ b) A es antisimétrica.
- ☐ c) $det(A) = 0$.
- ☐ d) $A^2 = I$

3 Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, el determinante de A es

- ☐ a) −3
- ☐ b) 3
- ☐ c) 0
- ☐ d) −1

4 El desarrollo del determinante $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ genera un polinomio cuyas raíces reales son

- ☐ a) 0 y 3.
- ☐ b) 0 y −3.
- ☐ c) 1 y −3.
- ☐ d) no tiene raíces reales.

5 Para el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + z = 0 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$

- ☐ a) la solución es $x = 1; y = 1; z = 2$.
- ☐ b) la solución es $x = 2; z = 6; y = \frac{5}{2}$.
- ☐ c) no hay solución.
- ☐ d) hay infinitas soluciones.

6 Un ejemplo de matriz antisimétrica es

- ☐ a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ d) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, entonces:

- ☐ a) $det(A) \geq 0$
- ☐ b) $det(A) < 0$
- ☐ c) $det(A) = 2a$
- ☐ d) $det(A) = -1$

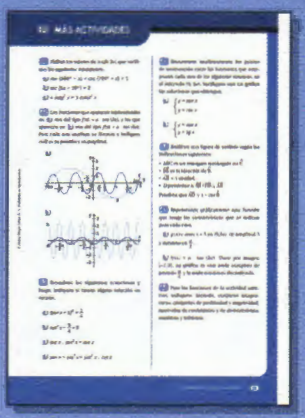
© Aique Grupo Editor S. A. Prohibida su reproducción.

Cómo son estos cuadernillos

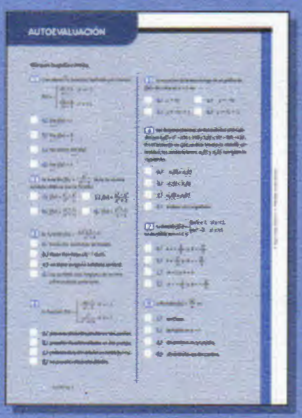
Apertura
Una situación disparadora es el eje que abre cada capítulo.

Revisión inicial
Incluye actividades para repasar los conocimientos previos.

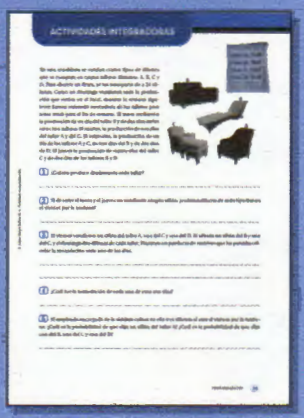
En el mundo real
Trata ejemplos con datos concretos, vinculados a aplicaciones a otras disciplinas y a situaciones cotidianas.



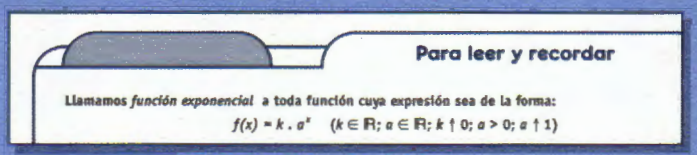
Más actividades
Contiene una serie adicional de ejercitaciones diversas de todos los temas desarrollados en el capítulo.



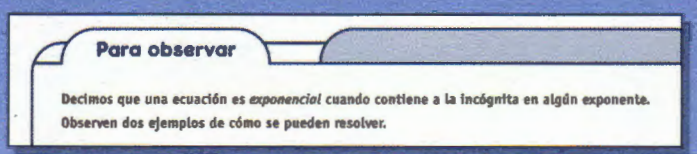
Autoevaluación
Se propone una combinación de actividades que servirá a modo de evaluación de los contenidos tratados en el capítulo.



Actividades integradoras
Al final de los cuadernillos 2, 4 y 6, se presenta una sección con propuestas destinadas a interrelacionar los contenidos de los cuadernillos anteriores.



Los recuadros identificados con la leyenda **Para leer y recordar** contienen información necesaria para la resolución de las actividades (conceptos, fórmulas, definiciones).



Los recuadros identificados con la leyenda **Para observar** contienen ejemplos explicados.

12 — Un número con fondo de color indica que la actividad es de mayor complejidad.

AIQUE